Iratxe Berriozabal Campillo.
Abril 96'

TEMA 5 - MEDIDAS DE POSICION Y DISPERSION DE V.A.

(5-1) - Esperanza matemática ó valor esperado

(5-2) - La esperanza matemática como media : sentido probabilistico de la esperanza matemática

(5-3) - Esperanza condicional

(5-4) - Otras medidas de posición

(5-5) - Medidas de dispersión : Varianza y Desviación tipica

(5-6) - Desigualdad de Chebishev

BIBLIOGRAFIA

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

GEORGE C. CANAVOS (capitulo 3)

INTRODUCCION A LA ESTADISTICA TEORICA

G. ARNAIZ (capitulo 3)

TEMA 5 MEDIDAS DE POSICION Y DISPERSION DE UNA V.A. DISCRETA

(5-1) Esperanza matematica ó valor esperado

La esperanza matematica de una v.a. discreta se define, como la suma de los productos de todos sus valores posibles por sus correspondientes probabilidades.

La designaremos por $E(x)$, y por lo tanto:

$$E(x) = x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n = \sum x_i\, f(x_i)$$

donde $f(x_i)$ es la funcion de probabilidad

La esperanza matemática será siempre una constante.

------ -------

(5-2) -La esperanza matematica como media: Sentido probabilístico de la esperanza matematica.

Se realizan n pruebas de un experimento; definimos una v.a. X que puede adoptar K valores diferentes.

La v.a. X adopta m_1 veces el valor x_1 ; m_2 veces el valor x_2 ... m_k veces el valor x_k , de tal forma que $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ veces $= n$

Entonces, la suma de todos los valores tomados por X es igual a:

$$m_1\,x_1 + m_2\,x_2 + \ldots + m_k\,x_k$$

y la media aritmetica $\bar{X}$, de todos los valores tomados por X será:

$$\bar{X} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_kx_k}{n}$$

ó lo que es lo mismo: $\bar{X} = \frac{m_1}{n}\,x_1 + \frac{m_2}{n}\,x_2 + \ldots + \frac{m_k}{n}\,x_k$

si hacemos las relaciones $\frac{m_1}{n} = w_1$ que será la frecuencia relativa de x_1 ; $\frac{m_2}{n} = w_2$ que será la frecuencia relativa de x_2 ; etc. .... Por lo que: $\bar{X} = x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots + x_kw_k$

Si el nº de pruebas es bastante grande, la frecuencia relativa la podemos considerar aproximadamente igual a la probabilidad de aparición de un suceso:

$$w_1 \simeq P_1 \;;\; w_2 \simeq P_2 \;;\; \ldots \;;\; w_k \simeq P_k$$

entonces: $\bar{X} \simeq P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_kx_k$

y por lo tanto: $\bar{X} \simeq E(x)$

Propiedades de la esperanza matematica:

1ª) La esperanza matematica de una constante es igual a la misma constante: $E(C) = C$

2ª) Un factor constante, se puede sacar fuera de la esperanza matemática $E(C\,X) = C\,E(X)$

3ª) La esperanza matematica del producto de dos v.a. independientes es igual al producto de sus esperanzas matematicas.

$$E(X.Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

4ª) La esperanza matematica de la suma de dos v.a. es igual a la suma de las esperanzas matematicas de las variables aleatorias.

$$E(x+y) = E(x) + E(y)$$

5º) Tenemos una v.a. X, y definimos una nueva v.a. Y en función de X, mediante: $Y = \varphi(x)$; Entonces: $E[\varphi(x)] = E[Y]$

6ª) Sean $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ dos funciones de una v.a. X, cuyas esperanzas matematicas existen. Entonces:

$$E[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] = E[\varphi_1(x)] + E[\varphi_2(x)]$$

7ª) Si C_1 y C_2 son dos constantes. Entonces:

$$E[C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)] = C_1 E[\varphi_1(x)] + C_2 E[\varphi_2(x)]$$

8ª) Si $Y=\varphi_1(x)$ y $Z=\varphi_2(x)$ dos v.a. definidas en funcion de la v.a. X, y se verifica que Z e Y son independientes y que existen $E[Y]$ y $E[Z]$; Entonces: $E[\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)] = E[\varphi_1(x)]\cdot E[\varphi_2(x)]$

9ª) Si $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$; Entonces: $E[\varphi_1(x)] \leq E[\varphi_2(x)]$

10ª) Sea $Y=\varphi_1(x)$ definida en funcion de la v.a. X, ademas existe $E[\varphi_1(x)]$, entonces se verifica que: $|E[\varphi_1(x)]| \leq E[|\varphi_1(x)|]$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

(5-3)-Esperanza condicional

Sean dos v.a. X e Y con funcion de densidad conjunta $f(x;y)$ y definimos la esperanza matematica de la v.a. X condicionada por Y como:

$$E[X/Y] = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P[x_i/y_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{f(x_i;y_i)}{f(y_i)}$$

(5-4) -Otras medidas de posicion

Media: Como se ha dicho, $\bar{X} = E(x)$

Mediana: Suponemos una v.a. X, con posibles valores $x_1; x_2; \ldots x_n$ con sus correspondientes probabilidades, $P[X=x_1]$; $P[X=x_2]$; etc.

La Mediana (Me) será aquel valor de la variable que cumpla estas dos condiciones:

a) $P[X \leq x_i] = 1/2$
b) $P[X \geq x_i] = 1/2$

Moda: Será el valor de la variable que cumpla la siguiente condición:

$$P[X=x'] < P[X=x_i] > P[X=x'']$$

donde x' y x'' son cualquier valor de la variable distinto de x_i; Entonces $x_i = Mo$

Percentiles: Será el valor de la variable que cumpla estas dos condiciones:

a) $P[X \leq x_i] = P$
b) $P[X \geq x_i] = 1-P$

donde P es un porcentaje, y por lo tanto, si x_i cumple estas dos condiciones, podremos decir que x_i es el percentil de orden P.

- - - - - - - -   - - - - - - - -

(5-5) -Momentos: Funcion generatriz de momentos

Tenemos una v.a. X con n posibles valores y sus correspondientes probabilidades.

(5-5-1) Momentos respecto al origen

Llamaremos momento respecto al origen de orden r (y lo designaremos por μ_r) de la variable aleatoria X a la expresión:

$$\mu_r = \sum_1^n (X_i - X_a)^r \cdot f(X_i)$$

como en este caso consideramos el origen como 0; $Xa = 0$. Por lo que,

$$\mu_r = \sum_1^n (X_i)^r \; f(X_i) = E(X^r)$$

Si tenemos dos v.a. X e Y con n y k posibles valores respectivamente, y con funcion de probabilidad conjunta $f(X;Y)$

Llamaremos "momento respecto al origen de orden $r_1 + r_2$" (y lo designaremos por $\mu_{r_1 r_2}$) de las variables aleatorias X e Y a la expresion:

$$\mu_{r_1, r_2} = \sum_1^n \sum_1^k x^{r_1} y^{r_2} f(x,y) = E(x^{r_1} y^{r_2})$$

(5-5-2) Momentos respecto a la Media; momentos centrales

Llamaremos "momento central de orden r" (y lo designaremos por $\mu'r$) de la variable aleatoria X a la expresion:

$$\mu'_r = \sum_1^n (x_i - E(X))^r \cdot f(x_i) = E[(X - E(X))^r]$$

Si tenemos dos v.a. X e Y con n y k valores posibles y con funcion de probabilidad conjunata f(X;Y), llamaremos "momento central de orden r + r" (y lo designaremos por M'r r) de las variables aleatorias X e Y con valores esperados $E(X) = \mu_X$ y $E(Y) = \mu_Y$ a la expresion:

$$\mu'_{r_1;r_2} = \sum_1^n \sum_1^k (x_i - \mu_x)^{r_1} (y_j - \mu_y)^{r_2} \cdot f(x_i; y_j) =$$
$$= E[(X - \mu_X)^{r_1} (Y - \mu_y)^{r_2}]$$

Covarianza de X e Y: Es el momento central de orden 1+1; y lo designaremos por COV (X,Y) ó por

Por lo tanto $COV(X,Y) = E[(X - \mu_X)^{r_1} (Y - \mu_Y)^{r_2}]$

si efectuamos esto nos quedará: $COV(X;Y) = E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) + \mu_X \mu_Y$

como $E(X) = \mu_X$ $\quad E(Y) = \mu_Y$

$$COV(X;Y) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X) \cdot E(Y) + E(X) \cdot E(Y) =$$
$$= E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

En el caso en que X e Y sean independientes COV (xy) = 0, pero puede darse el caso de que a pesar de que la covarianza sea nula, las variables X e Y no sean independientes.

- - - - - - - -   - - - - - - - -

(5-5-3) Funcion generatriz de momentos

Tenemos una v.a. X con n posibles valores y sus correspondientes probabilidades.

Llamaremos funcion generatriz de momentos de dicha variable aleatoria y la designaremos por $M_X(t)$, al valor esperado de e^{tX}

Por lo tanto $M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_1^n e^{tx_i} \cdot f(x_i)$

La razon por la cual denominamos a esta función "funcion generatriz", es porque ésta nos vá generando los sucesivos momentos respecto al origen de la v.a. X

si derivamos $M_X(t)$ respecto de t y hacemos luego t=0, iremos obteniendo los sucesivos momentos respecto al origen de la v.a. X

$$M'_X(t) = \sum_1^n x_i e^{tx_i} \cdot f(x_i)$$

Si $t=0$ $\quad M'_X(0) = \sum_1^n x_i \cdot f(x_i) = E(X)$

que es el momento respecto al origen de primer orden.

$$M''_X(t) = \sum_1 x_i^2 e^{tx_i} \cdot f(x_i)$$

$$\text{si } t=0 \quad M''_x(0) = \sum_1^n x_i^2 \cdot f(x_i) = E(x^2)$$

que es el momento respecto al orgigen de 2º orden, etc.

Es importante señalar que, si dos v.a. tienen la misma función generatriz de momentos, también tendran la misma funcion de probabilidad.

-Propiedades de la funcion generatriz de momentos

1ª) $M_X(0) = E[e^0] = 1$

2ª) $M_{aX}(t) = M_X(at)$

3ª) $M_{aX+b}(t) = E[e^{t(ax+b)}] = e^{bt} E[e^{tax}] = e^{bt} \cdot M_X(at)$

4ª) $M_{X-M_X}(t) = E[e^{t(x-M_x)}] = e^{-M_x t} M_x(t)$

Tenemos dos v.a. X e Y con n y k posibles valores, y con funcion de probabilidad conjunta $f(x_i; y_j)$ $\forall\, i=1,2,\dots n;\ j=1,\dots k$ Llamaremos "funcion generatriz conjunta de momentos" de las v.a. X e Y, (y la designaremos por $M_{x,y}(t_1;t_2)$) al valor esperado de $e^{t_1x+t_2y}$

Por lo tanto $M_{xy}(t_1;t_2) = E[e^{t_1x+t_2y}] = \sum_1^n \sum_1^k e^{t_1x_i+t_2y_j} \cdot f(x_i;y_j)$

Si derivamos $M_{x,y}(t_1;t_2)$ con respecto a t_1 y t_2 y hacemos ~~~~ $t_1 = t_2 = 0$ obtendremos los distintos momentos respecto al origen.

$$\frac{\partial M_{xy}(t_1;t_2)}{\partial t_1} = \sum_1^n \sum_1^k x_i \cdot e^{t_1x_i+t_2y_j} \cdot f(x_i;y_j) =$$

$$\text{si } t_1=t_2=0$$

$$= \sum_1^n \sum_1^k x_i \cdot f(x_i;y_j) = E(x)$$

$$\frac{\partial M_{xy}(t_1;t_2)}{\partial t_2} = \sum_1^n \sum_1^k y_j \cdot e^{t_1x_i+t_2y_j} \cdot f(x_i;y_j)$$

$$\text{si } t_1=t_2=0$$

$$= \sum_1^n \sum_1^k y_j \cdot f(x_i;y_j) = E[Y]$$

De esta manera: $\dfrac{\partial^2 M_{xy}}{\partial^2 t_1} = E[x^2]$ $\quad \dfrac{\partial^2 M_{xy}}{\partial^2 t_2} = E[Y^2]$

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial t_1 \partial t_2} = E[XY]$$

Si en vez de X e Y introducimos $X - \mu_X$; $Y - \mu_Y$, la correspondiente funcion generatriz nos permitirá obtener los correspondientes momentos centrales.

- - - - - - - - - - - - - - - - -

(5-6) -Medidas de dispersion: Varianza y Desviacion típica

Si solo conocemos la esperanza matematica de una v.a., no podemos predecir cuales son los posibles valores que tomará ni tampoco como estan dispersos alrededor de su esperanza matemática.

Por lo tanto, la esperanza matemática no caracteriza del todo la v.a., y tendremos que introducir otras caracteristicas numéricas de la distribución, como la característica de la dispersión, que nos dirá como estan dispersos los posibles valores alrededor de la esperanza matemática.

Vamos a llamar "desviacion" a la diferencia entre una v.a. y su esperanza matemática. $X - E(x)$

Supongamos que la distribución de probabilidad (la ley de distribucion) de la v.a. X es la siguiente:

valores de X: x_1 ; x_2 ;.....; x_n
Probabilidades: P_1 ; P_2 ; ....; P_n

la ley de dustribucion de las desviaciones será la siguiente: cuando la desviación toma el valor $x_1 - E(x)$ es suficiente con que la variable tome el valor x_1 cuya probabilidad es P_1, etc.

$x_1 - E(x)$: $x_2 - E(x)$; $x_3 - E(x)$ .... ; $x_n - E(x)$
P_1 P_2 ; P_3 ; P_n

Una propiedad importante de las desviaciones es, que su esperanza matemática es igual a 0

$$E\left[x - E(x)\right] = 0$$

Para estimar la dispersión, lo mas sencillo sería, calcular todos los valores posibles de las "desviaciones" de una v.a., y despues calcular su valor medio, sin embargo, este método no dá resultado, pues como se ha dicho antes $E\left[x - E(x)\right] = 0$ debido a que habrá desviaciones positivas y negativas que se anularan entre si.

Para calcular la dispersión, elevamos al cuadrado las desviaciones y calcularemos el valor medio de los cuadrados de las desviaciones que llamaremos "dispersión" ó "varianza".

$$\mathrm{Var}(x) = E\left[(x - E(x))^2\right]$$

ó tambien:

$$\mathrm{Var}(x) = (x_1 - E(x))^2 P_1 + \dots\dots + (x_n - E(x))^2 P_n$$

Propiedades de la varianza:

1ª) $Var(x) = E[x^2] - [E(x)]^2$

2ª) La dispersion de una constante C es igual a cero/ $Var(C) = 0$

3ª) $Var(ax + b) = a^2 Var(x)$

4ª) $Var(ax + by) = a^2 Var(x) + b^2 Var(y) + 2ab\, COV(x; Y)$

5ª) $Var(\sum a_i x_i) = \sum a_i^2 Var(x_i) + \sum_{i \neq j}\sum a_i a_j\, cov(x_i; x_j)$

6ª) Si las variables son independientes

$$Var(x + y) = Var(x) + Var(y)$$

7ª) Si las variables son independientes

$$Var(x - y) = Var(x) + Var(y)$$

Si la v.a. está expresada en una determinada dimension, nos encontraremos con que la varianza tiene una dimensión que es el cuadrado de la originaria. Para evitar este problema calcularemos la desviación standar ó típica, que es la raiz cuadrada positiva de la varianza. $\sigma(x) = \sqrt{Var(x)}$

con lo que la dimensión de la desviación standar coincidirá con la de la v.a.

- - - - - - - - - - - - - -

(5-7) -Teorema de Chebishev

En esta pregunta vamos a ver la manera de obtener un limite inferior de la probabilidad de que la v.a. X caiga en un intervalo de la forma $\mu \pm k\sigma$

El resultado que vamos a obtener se puede aplicar para cualquier tipo de distribucion de probabilidad.

Para poder demostrar el Teorema vamos a tener que ver primero, en que consiste la "desigualdad de Chebishev", mediante la cual vamos a calcular la probabilidad de que la desviacion de la v.a. respecto de su esperanza matemática no supere en valor absoluto un numero positivo ε. La desigualdad de Chebishev dice: que la probabilidad de que la desviacion de la v.a. X respecto de su esperanza matemática sea menor en valor absoluto que un numero positivo ε, es no menor que $1 - \frac{Var(x)}{\varepsilon^2}$

es decir: $P[|X-E(x)| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{Var(x)}{\varepsilon^2}$

-Demostración

Los sucesos $|X-E(x)| < \varepsilon$ y $|X-E(x)| \geq \varepsilon$ son opuestos, por lo

tanto mutuamente excluyentes y constituyen todos los sucesos posibles que se pueden dar, por lo que la suma de sus probabilidades es igual a la unidad.

$$\left\{\begin{array}{l} P[|X-E(x)|<\varepsilon] + P[|X-E(x)|\geq\varepsilon] = 1 \\ P[|X-E(x)|<\varepsilon] = 1 - P[|X-E(x)|\geq\varepsilon] \end{array}\right\} \quad [*]$$

Vamos a calcular cual es la $P[|X-E(x)|\geq\varepsilon]$

Sabemos que: $Var(X) = [x_1-E(x)]^2 \cdot P_1 + [x_2-E(x)]^2 \cdot P_2 + \cdots + [x_n-E(x)]^2 \cdot P_n$
y todos estos sumandos son no negativos.

Para efectos de la demostracion, vamos a suponer que, los valores de la v.a. X estan ordenados de tal forma que los k primeros sumandos cumplen que $|X-E(x)|<\varepsilon$; por lo que es resto de los valores cumpliran que $|X-E(x)|\geq\varepsilon$

Es decir: $\underbrace{x_1; x_2 \cdots ; x_k}_{\text{Cumplen que } |X-E(x)|<\varepsilon} ; \underbrace{x_{k+1}; x_{k+2}; \cdots x_n}_{\text{Cumplen que } |X-E(x)|\geq\varepsilon}$

Si eliminamos los k primeros valores:

$$Var(x) \geq [x_{k+1}-E(x)]^2 \cdot P_{k+1} + \cdots + [x_n-E(x)]^2 \cdot P_n$$

Como sabemos que para cualquier x_j tal que $j = k+1; k+2; \cdots ; n$ se cumple que $|X-E(x)|\geq\varepsilon$
entonces, $[x_j-E(x)]^2 \geq \varepsilon^2$

Sustituyendo: $\left\{\begin{array}{l} Var(x) \geq \varepsilon^2 P_{k+1} + \varepsilon^2 P_{k+2} + \cdots + \varepsilon^2 P_n \\ Var(x) \geq \varepsilon^2 (P_{k+1} + P_{k+2} + \cdots + P_n) \end{array}\right.$

Esta suma de probabilidades nos expresa $P[|X-E(x)|\geq\varepsilon]$ por lo que sustituyendo en la expresion anterior nos quedará:

$$Var(x) \geq \varepsilon^2 P[|X-E(x)|\geq\varepsilon]$$

ó lo que es los mismo: $\dfrac{Var(x)}{\varepsilon^2} \geq P[|X-E(x)|\geq\varepsilon]$

Sustituyendo en [*]

$$P[|X-E(x)|<\varepsilon] = 1 - \frac{Var(x)}{\varepsilon^2}$$

Como $\dfrac{Var(x)}{\varepsilon^2}$ es $\geq$ que $P[|X-E(x)|\geq\varepsilon]$ esta expresión nos quedara

$$P[|X-E(x)|<\varepsilon] \geq 1 - \frac{Var(x)}{\varepsilon^2}$$

c.q.d

-Teorema de Chebishev

Si $X_1; X_2; \ldots\ldots X_n$ son v.a. independientes de dos en dos, ademas sus dispersiones estan uniformemente limitadas (no superan una constante C), por mas pequeño que sea el número positivo ε, la probabilidad de la desigualdad:

$$\left| \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - \frac{E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$$

sera tan próximo a la unidad como se quiera, si el número de v. a. es bastante grande. Es decir:

$$\left[\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - \frac{E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1 \right]$$

Demostración

Si consideramos la desigualdad $\left| \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - \frac{E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$

teniendo en cuenta que:

1º) $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} = \bar{X}$ media aritmetica de las v.a.

2º $\frac{E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)}{n} = E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)$

Por una de las propiedades de la esperanza matematica, entonces la desigualdad nos quedará:

$$|\bar{X} - E(\bar{X})| < \varepsilon$$

Sustituyendo X por $\bar{X}$ en la desigualdad de Chebishev, ésta nos quedará: $P(|\bar{X} - E(\bar{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{Var(\bar{X})}{\varepsilon^2}$

o lo que es lo mismo

$$\left[P\left(\left| \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - E\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) \right| < \varepsilon \right) = 1 - \frac{Var\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \right]$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la varianza

1º) Un factor constante, se puede sacar fuera de la varianza elevandolo al cuadrado.

2º) La varianza de la suma de v.a. independientes es igual, a la suma de las varianzas de los sumandos,

entonces podemos poner que:

$$\left[Var\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(Var(X_1)+Var(X_2)+\cdots+Var(X_n)\right) \right]$$

Teniendo en cuenta que, una de las condiciones del Teorema de Chebishev nos decia que las varianzas (dispersión) tenian que estar uniformemente limitadas por una constante C

$$\text{Var}(X_1) \leq C \; ; \quad Var(X_2) \leq C \; ; \quad \cdots \quad ; \; Var(X_n) \leq C$$

nos quedará,

$$\frac{Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)}{n^2} \leq \frac{C + C + \cdots + C}{n^2} = \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}$$

por lo que,
$$\text{Var}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) \leq \frac{C}{n}$$

si sustituimos esto en la desigualdad de Chebishev

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

Si consideramos que el número de variables aleatorias es muy grande, es decir si hacemos $n \to \infty$, nos encontraremos con que la expresion $\frac{C}{n\varepsilon^2} \to 0$ y por lo tanto,

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1$$

como una probabilidad no puede ser nunca mayor que 1, nos quedará:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{E(X_1) + \cdots + E(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

c.q.d.

- - - - - - -   - - - - - - - -

EJEMPLO 1:

Sea X una variable aleatoria discreta con posibles valores:

0; 2; 4; 6; 8

y con probabilidades:

$P(X=0) = 0{,}1$; $P(X=2) = 0{,}2$; $P(X=4) = 0{,}1$; $P(X=6) = 0{,}2$; $P(X=8) = 0{,}4$

Calcular su esperanza matemática.

EJEMPLO Nº 2:

Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x;y) = \begin{cases} 4\,X\,Y & \text{si } 0 < X < 1 \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Definimos una variable aleatoria $V(x;y) = 4X - Y$.

Calcular:

$E(4X - Y)$

$E(XY)$

$E(X)$

ESPERANZA MATEMÁTICA o VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Tenemos una variable aleatoria X con función de densidad f(X)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

Si U(X) es una función de la variable aleatoria X con función de densidad f(X):

$$E[U(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x)\, f(x)\, dx$$

Si V(X;Y) es una función de dos variables aleatorias X e Y con función de densidad conjunta f(x;y)

$$E[V(X;Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x;y)\, f(x;y)\, dx dy$$

EJEMPLO Nº 3:

Un fabricante lanza al mercado dos productos A y B que se complentan, es decir, existe una relación entre ambos que hace posible que comprando A se compre B y viceversa. (También es posible que si se compra A o B no se compre el otro).

Después de un tiempo, en un supermercado se hace un estudio de las ventas de los productos A y B y se llega a la conclusión de que el número máximo de artículos A (o de artículos B) es de dos.

Si definimos la variable aleatoria X como "Número de artículos A que compra un cliente" y la variable aleatoria Y como "Número de artículos B que compra un mismo cliente" obtenemos del estudios los siguientes resultados:

Y \ X	0	1	2	P(Y = y)
0	10/50	6/50	5/50	21/50
1	10/50	6/50	4/50	20/50
2	2/50	3/50	4/50	9/50
P(X = x)	22/50	15/50	13/50	1

Calcular:

E(X/Y)

E(Y/X)

ESPERANZA CONDICIONAL

Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta f(x;y)

$$E[\ X\ /\ Y=y\ ] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x/y)\, dx$$

Si definimos una función de X: U(X)

$$E[\ U(X)\ /\ Y=y\ ] = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x)\, f(x/y)\, dx$$

$$E[\ E(X/Y)\ ] = E(X)$$

EJEMPLO Nº 4:

En la fabricación de un determinado medicamento intervienen dos productos A y B que se obtienen conjuntamente mediante un proceso químico.

Experimentalmente se ha comprobado que las cantidades X e Y de los productos A y B que se obtienen en el proceso, no superan nunca los dos gramos.

Se decide asignarles la función de densidad conjunta:

$$f(x;y) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x > 0; \quad y > 0; \quad x + y < 2 \\ 0 & \text{en el resto de los casos} \end{cases}$$

Se desea conocer para una cantidad dada del producto A, qué cantidad se espera obtener del B.

OTRAS MEDIDAS DE POSICIÓN

MEDIA:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

MEDIANA: La mediana será el punto x_a tal que

$$\int_{-\infty}^{x_a} f(x)\, dx = 1/2 = \int_{x_a}^{+\infty} f(x)\, dx$$

MODA: Será el punto en que f(x) alcanza su máximo (si lo tiene)

Tendremos que hacer $f'(x) = 0$; obtenemos un punto x_0; si $f''(x_0) < 0$ la función tendrá un máximo, por lo que existirá una moda.

EJEMPLO Nº 5:

De una urna que contiene 5 bolas blancas y 4 bolas negras se realizan dos extracciones sucesivas con reemplazamiento.

Si convenimos en representar por X e Y los resultados aleatorios de la 1ª y 2ª extracción respectivamente, determinar:

a) La distribución de probabilidad conjunta de la variable (x;y)

b) La distribución de probabilidad marginal de la variable aleatoria Y

c) La covarianza entre las variables X e Y

EJEMPLO Nº 6:

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular la media, la mediana y la dispersión de esta variable.

EJEMPLO Nº 7:

Calcular la probabilidad de que la variable aleatoria X se desvíe de la esperanza matemática no menos de dos desviaciones típicas.

ESTADISTICA I
TEMA 5º: Medidas de posición y dispersión de una variable aleatoria.
PROBLEMAS

1º.- Una rata se encuentra en el centro de un laberinto. Tres orificios igualmente atractivos A, B y C, parten del centro de dicho laberinto. Si la rata elige A, vuelve al centro después de 2 minutos. Si elige B, vuelve al centro después de 5 minutos. Si elige C, sale al exterior después de 1 minuto. Supuesto esto, consideremos la variable aleatoria X "*minutos empleados en salir al exterior*". ¿ Cuánto valdrá el valor esperado de X ?. (Se supone que siempre que la rata vuelve al centro del laberinto, elige un orificio distinto del escogido en el intento o intentos anteriores.)

2º.- En una lotería se venden 100 billetes de 25 pesetas cada uno. Hay un premio de 1000 pesetas y otro de 200. Consideremos la variable aleatoria "*pesetas ganadas por quien compra dos billetes*". Calcular su valor esperado.

3º.- Calcular la media y la varianza de X, siendo X "*el valor observado al lanzar un dado*".

4º.- Siendo

$$f(X) = \begin{cases} 2X & \text{para } 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & \text{para el resto de los casos} \end{cases}$$

calcular E(X) y Var(X).

5º.- Demostrar que $E[(X-k)^2]$ es menor para $k=E(X)$ que para cualquier otro valor.

6º.- Siendo $X^2 = X \cdot X$ ¿ podemos afirmar que $E(X^2) = E(X) \cdot E(X)$?

7º.- Una caja contiene 6 tarjetas. 2 de ellas tienen un premio de 500 pesetas cada una, y las otras 4 tienen un premio de 100 pesetas cada una. Si se saca una tarjeta ¿ cuál es la esperanza matemática del juego ?. ¿ Y si se sacan dos tarjetas ?.

8º.- Un contratista hace propuestas para la construcción de una carretera que promete dar un beneficio de 42 millones de pesetas con una probabilidad de 0.6 o una pérdida de 16 millones de pesetas (debida a estimaciones defectuosas, huelgas, entrega tardía de materiales, ...) con una probabilidad de 0.4. ¿ Cuál es la esperanza matemática del contratista ?.

9º.- La variable aleatoria X puede tomar los valores 0, 1 y 2 (sólo estos). ¿ Qué probabilidades deberemos atribuir a dichos valores de modo que E(X) = 1 y Var(X) = 0.5 ?

10º.- Sabiendo que $P(| X - \mu | > 8) < 0.25$ y que $E(X^2) = 25$, ¿ cuánto debe valer E(X) ?

11º.- La probabilidad de que el Sr. García venda su casa perdiendo 100.000 pesetas es de $^3/_{18}$; la probabilidad de que la venda por lo mismo que le costó es de $^2/_3$; la probabilidad de que la venda ganando 200.000 pesetas es de $^3/_{18}$. ¿ Cuál es el beneficio esperado del Sr. García ?

12º.- Lanzamos al aire dos monedas y un dado, dos de cuyas caras tienen un punto, otras dos tienen dos puntos y las dos restantes tienen tres puntos. Sean las variables aleatorias X "*número de caras en las dos monedas*" e Y "*número de puntos del dado*". Definimos, además, W = Y si X = 0 ó X = 1, y W = 3 si X = 2. Calcular E(X), E(Y), E(W), Cov(X;Y), Cov(X;W).

13º.- Sea X la variable aleatoria "*cantidad de dinero ahorrada por una persona en un mes*" cuya función de distribución es:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{para } X < 0 \\ (^1/_2)\,X & \text{para } 0 \le X < 1 \\ ^1/_2 & \text{para } 1 \le X < 2 \\ (^1/_4)\,X & \text{para } 2 \le X < 4 \\ 1 & \text{para } 4 \le X \end{cases}$$

donde X viene expresada en miles de pesetas. Determinar la cantidad media de ahorro en un mes.

14º.- En la fabricación de un determinado detergente intervienen dos productos A y B. Se ha comprobado que el tiempo X e Y que tardan en elaborar A y B tiene como función de densidad conjunta:

$$f(xy) = \begin{cases} ^1/_9 & \text{para } 0 < X < 3;\ 1 < Y < 4 \\ 0 & \text{en el resto de los casos} \end{cases}$$

se desea conocer para un tiempo dado de elaboración del producto A, en qué tiempo se espera que se elabore el producto B.

15º.- Un individuo indiferente al código de circulación, va tres veces por día a la oficina, donde no tiene lugar de aparcamiento. Puede elegir entre estas dos normas de conducta:

a) llevar el coche al aparcamiento, que le cuesta 350 pesetas cada vez;

b) dejar el coche mal estacionado. En este caso le pueden poner multa o no. Si le ponen multa tiene que pagar 500 pesetas.

Si la probabilidad de que le impongan una multa es de 0.5 ¿ cuál es la conducta que le resultará más económica ?.

16º.- Sabiendo que la varianza de una variable aleatoria X es gual a 0.001, calcular la probabilidad de que las desviaciones con respecto a la media sean menores que 0.1.

17º.- Una sucesión de variables aleatorias independientes X_1, X_2, ..., X_n tiene la siguiente Ley de distribución:

X_n	$-na$	0	na
P	$^1/_2\ n^2$	$1 - 1/n^2$	$^1/_2\ n^2$

¿ es aplicable el Teorema de Chebishev ?

18º.- Se sabe que el número medio de personas que concurren diariamente a un cierto local es de 200 con una desviación típica de 20. El número de concurrentes N por día es una variable aleatoria de la que desconocemos su distribución. ¿ Cuántas sillas tenemos que tener preparadas para tener una probabilidad de 0.75 ó más de que los asistentes puedan sentarse ?
Además se sabe que $P[\,|X - \mu| > 2\sigma\,] \leq {}^1/_4$

19º.- Una variable aleatoria X tiene una distribución de probabilidad con función de densidad

$$f(X) = \begin{cases} {}^X/_8 & \text{para } 0 \leq X \leq 4 \\ 0 & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

Calcular:

a) $P[\,\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma\,]$
b) $P[\,\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2c\,]$ por el Teorema de Chebishev.

20º.- Siendo X la variable aleatoria "*horas de vida de cierto tipo de estufas eléctricas*". y siendo su función de densidad

$$f(X) = \begin{cases} 25000/(X^3) & \text{para } X > -50 \\ 0 & \text{en el resto de los casos} \end{cases}$$

calcular la vida media de dichas estufas.

SOLUCIONES:

1º.- 4.5 minutos

2º.- (- 26) pesetas

3º.- E(X) = 7/2; Var(X) = 35/12

4º.- E(X) = 2/3; Var(X) = 1/18

6º.- Sólo si Var(X) = 0

7º.- E(X)=700/3; E(X)=1400/3

8º.- 18.800.000 pesetas

9º.- 0.25; 0.50; 0.25

10º.- E(X) = 3

11º.- 166666 pesetas

12º.- E(X) = 1; E(Y) = 2; E(W) = 3; Cov(XY) = 0; Cov(XW) = 1

13º.- 1750 pesetas

14º.- 2.5

15º.- b)

18º.- 240 sillas

19º.- 0.95

20º.- 500 horas